
1. Открытые и замкнутые множества на прямой. Канторово множество и его свойства.

[1] стр. 73

Точка x_0 называется **предельной** для множества E , если любая ее окрестность содержит по меньшей мере одну точку x из E , отличную от x_0 . Если $x_0 \in E$, но не является предельной точкой, то она называется **изолированной** точкой E . Множество E' всех предельных точек E называется **производным** множеством для E . Если любая предельная точка E принадлежит этому множеству ($E' \subseteq E$), то множество E называется **замкнутым**. Если $E = E'$, то множество E называется **совершенным**. Множество $[E] = E + E'$ называется **замыканием** E . Точка x_0 называется **внутренней** точкой множества E , если существует окрестность x_0 , полностью лежащая в E . Множество E называется **открытым**, если все его точки внутренние.

Теорема. Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой сумму конечного или счетного числа попарное непересекающихся интервалов (при этом рассматриваются также "бесконечные" интервалы).

Следствие. Всякое замкнутое множество получается из прямой выбрасыванием конечного или счетного числа интервалов.

Канторово множество — классическое «плохое множество», строится рекурсивным удалением средней трети из единичного отрезка $[0,1]$

Свойства

Канторово множество замкнуто.

Канторово множество континуально. В частности,

Канторово множество не счётно

Канторово множество имеет топологическую размерность 0.

Канторово множество имеет промежуточную (т.е. не целую) Хаусдорфову размерность равную $\ln 2 / \ln 3 \approx 0.63$ В частности,

Канторово множество имеет нулевую меру Лебега.

2. Свойства внешней меры. Измеримость открытого множества и счетного объединения измеримых множеств. Измеримость замкнутого множества, дополнения измеримого множества, разности и счетного пересечения измеримых множеств.

[1] стр. 293.

Определение. Внешней мерой $\mu^*(A)$ множества A называется нижняя грань меры элементарных множеств, включающих множество A .

Свойства внешней меры.

1. $(E_1 \subseteq E_2) \Rightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ (монотонность)

2. $(E = \cup E_k, k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mu^*(E) \leq \sum \mu^*(E_k))$

3. $(\rho(E_1, E_2) > 0) \Rightarrow (\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2))$

Определение. Множество A называется *измеримым по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B , что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. Функция μ^* , рассматриваемая только на измеримых множествах, называется *лебеговой мерой* μ .

Теорема. Любое открытое множество измеримо, причем его мера равна сумме мер непересекающихся составляющих его интервалов.

Теорема. Дополнение измеримого множества измеримо.

Это следует из равенства $(E \setminus A) \Delta (E \setminus B) = A \Delta B$.

Теорема. Сумма и пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримые множества.

Теорема. Любое замкнутое множество измеримо.

3. Свойство счетной аддитивности меры. Множества типа G_δ , F_σ

[1] стр. 299.

Теорема (счетная аддитивность меры). Если $\{A_n\}$ - последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств и A - объединение этих множеств, то $\mu(A) = \sum \mu(A_n)$.

Множество, представимое в виде пересечения конечного или счетного числа открытых множеств, называют **множеством типа G_δ** . Множество, представимое в виде объединения конечного или счетного числа замкнутых множеств, называют **множеством типа F_σ** .

Теорема. Если множество E измеримо, то существует множество E_1 типа F_σ и множество E_2 типа G_δ , такие, что $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ и $|E_1| = |E_2| = |E|$.

4. Измеримые функции и их свойства. Измеримость верхнего и нижнего пределов последовательностей измеримых функций.

[1] стр. 323.

Определение. Пусть X и Y - два произвольных множества и в этих множествах выбраны системы подмножеств S_X и S_Y соответственно. Функция $f: X \rightarrow Y$ называется (S_X, S_Y) -измеримой, если для любого подмножества $A \in S_Y$ его прообраз содержится в S_X : $f^{-1}(A) \in S_X$.

Теорема. Суперпозиция измеримых функций измерима.

Теорема. Измеримость действительной функции $f(x)$ эквивалентна измеримости любого из множеств $\{x | f(x) < c\}$, $\{x | f(x) > c\}$, $\{x | f(x) \leq c\}$, $\{x | f(x) \geq c\}$ при любом $c \in R$.

Теорема. Сумма, разность и произведение двух измеримых функций измеримы. Частное измеримых функций f и g измеримо, при условии, что $g \neq 0$.

Определение. Говорят, что некоторое свойство $A(x)$ выполнено почти всюду на E , если множество точек x' , где $A(x')$ не выполнено, имеет меру 0.

Определение. Функции f и g , заданные на измеримом множестве E , называются **эквивалентными**, если $\mu\{x | f(x) \neq g(x)\} = 0$. Иначе говоря, функции эквивалентны, если они равны на E почти всюду.

Теорема. Если функция g измерима, а $f \sim g$, то функция f также измерима.

Теорема Если $\{f_n(x)\}$ – последовательность измеримых на E функций, то нижний и верхний пределы этой последовательности – измеримы на E (ограниченность функций не предполагается).

5. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и почти всюду

[1] стр. 330.

Теорема. Предел $f(x)$ сходящейся при каждом $x \in X$ последовательности $f_n(x)$ измеримых функций измерим.

Определение. Говорят, что последовательность измеримых функций $f_n(x)$ *сходится по мере* к функции $f(x)$, если для любого $\sigma > 0$:

$$\mu\{x | f(x) - f_n(x) \geq \sigma\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема (Лебег). Если последовательность измеримых на E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к некоторой предельной функции $f(x)$, то она сходится к той же самой предельной функции по мере.

Теорема (Рисс). Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$. Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду.

6. Теорема Рисса. Эквивалентность фун-й, явл. пределами по мере одной последовательности измеримых функций.

Теорема Рисса. Пусть E - измеримое множество конечной меры и пусть функции $f_n(x)$ и $f(x)$ - измеримы и почти всюду конечны на E , то из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на E .

Теорема Пусть E - множество конечной меры и пусть функции $f_n(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ почти всюду конечны. Тогда, если $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $f_n(x) - g(x)$ по мере одновременно, то $f(x) \sim g(x)$.

7. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Интегрируемость ограниченной и измеримой функции на множестве конечной меры.

Пусть E - измеримое множество и $|E| < +\infty$. Назовём разбиением E любое семейство $T = \{E_k\}_{k=1}^n = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ конечного числа измеримых, попарно не пересекающихся множеств и таких, что $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$.

Пусть $f(x)$ - произвольная ограниченная на множестве E функция. Для любого разбиения T обозначим $M_k = \sup_{x \in E_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x \in E_k} f(x)$ и рассмотрим суммы $S_T = \sum_{k=1}^n M_k |E_k|$, $s_T = \sum_{k=1}^n m_k |E_k|$, которые называются верхней и нижней суммами Лебега разбиения T . Ясно, что $s_T \leq S_T$ и эти суммы ограничены. Поэтому существуют $\bar{I} = \inf_T S_T$ и $\underline{I} = \sup_T s_T$, называемые верхним и нижним интегралами Лебега функции соответственно.

Определение. Ограниченная на множестве конечной меры E функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Лебегу) на E , если $\bar{I} = \underline{I}$, т.е. её верхний и нижний интеграл Лебега совпадают. Общее значение $I = \bar{I} = \underline{I}$ называется интегралом Лебега от $f(x)$ по множеству E и обозначается $I = \int_E f(x) dx$.

Теорема. Всякая ограниченная и измеримая на измеримом множестве конечной меры функция интегрируема на нём по Лебегу.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на некотором отрезке $[a; b]$ по Риману, то она также интегрируема и по Лебегу, причем интеграл Лебега равен интегралу Римана.

8. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции

[1], стр. 339

Утверждение. Пусть функции рассматриваются на некотором множестве A . Тогда

- $I[1] = \mu(A)$
- $I[kf(x)] = k I[f(x)]$
- $I[f(x) + g(x)] = I[f(x)] + I[g(x)]$ (аддитивность)

Причем из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой.

Утверждение (монотонность). Если интегрируемая на множестве A функция неотрицательна: $f(x) \geq 0$, то $I[f(x)] \geq 0$.

Утверждение. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны, то $I[f(x)] = I[g(x)]$, причем оба интеграла либо существуют, либо не существуют одновременно.

Утверждение. Если функция $g(x)$ интегрируема на A и почти всюду $|f(x)| \leq g(x)$, то f также интегрируема на A .

Утверждение. Интегралы $I[f(x)]$ и $I[|f(x)|]$ существуют или не существуют одновременно.

на E , $|E| < +\infty$, и $f_1(x) \geq f_2(x)$ всюду (почти всюду) на E , то $\int_E f_1(x) dx \geq \int_E f_2(x) dx$.

9. Интеграл Лебега от неограниченной и неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Мажорантный признак суммируемости.

Пусть $f(x) \geq 0$ всюду на E , $|E| < +\infty$, $f(x)$ - измерима и, возможно, неограничена. Для любого числа $N > 0$ положим $f_N(x) = \min\{N, f(x)\}$ - срезка функции $f(x)$. Функция $f_N(x)$ также измерима на E :

$$E[f_N > a] = \begin{cases} E[f > a], & \text{при } a < N \\ \emptyset, & \text{при } a \geq N \end{cases}$$

Причём срезка $f_N(x)$ - ограничена значит(по т.) существует интеграл $I_N(f) = \int_E f_N(x) dx$.

Определение Если при $N \rightarrow \infty$ существует $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(f) < +\infty$, то $f(x)$ называется суммируемой на множестве E , а этот предел называется интегралом Лебега от $f(x)$ на E и обозначается $\int_E f(x) dx = I(f)$.

Теорема (полная аддитивность интервала Лебега). Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $|E| < +\infty$,

$E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, все множества E_k - измеримы. Тогда 1) если $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ суммируема на E , то $f(x)$ суммируема на E_k , причем

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx; \quad (*)$$

2) если $f(x) \geq 0$, $f(x)$ суммируема на всех множествах E_k и ряд в формуле (*) сходится, то $f(x)$ суммируема на E и справедливо равенство (*).

Теорема (абсолютная непрерывность интервала Лебега). Если $f(x) \geq 0$ и суммируема на E , $|E| < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было измеримое подмножество $e \subset E$ с мерой $|e| < \delta$ справедливо неравенство $\int_e f(x) dx < \varepsilon$.

Теорема (мажорантный признак). Если $f_1(x) \geq 0$ - измерима на E , $|E| < +\infty$, $f_2(x)$ - суммируема на E и, если всюду на E выполняется неравенство $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $f_1(x)$ - суммируема на E и справедлива оценка $\int_E f_1(x) dx \leq \int_E f_2(x) dx$.

10. Интеграл Лебега от неограниченной ф-ии любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть $|E| < +\infty$, $f(x)$ - измеримая функция на E . Введём в рассмотрение две функции $f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$ и $f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$, которые также измеримы на E . Справедливы равенства $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.

Определение 3. Измеримая функция $f(x)$ называется суммируемой на E , $E < +\infty$, если на E суммируемы обе неотрицательные функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$. При этом интегралом Лебега от $f(x)$ называется разность $\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx$.

!!! теорема о переходе!

11. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Леви и следствие её для рядов. Теорема Лебега-критерий интегрируемости

Теорема (полная аддитивность). Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $|E| < +\infty$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, все множества E_k - измеримы. Тогда 1) если $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ суммируема на E , то $f(x)$ суммируема на E_k , причем

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx; \quad (*)$$

2) если $f(x) \geq 0$, $f(x)$ суммируема на всех множествах E_k и ряд в формуле (*) сходится, то $f(x)$ суммируема на E и справедливо равенство (*).

Теорема (абсолютная непрерывность). Если $f(x) \geq 0$ и суммируема на E , $|E| < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было измеримое подмножество $e \subset E$ с мерой $|e| < \delta$ справедливо неравенство $\int_e f(x) dx < \varepsilon$.

*все то же самое, только с модулями

Теорема Леви. Пусть $f_n(x)$ - суммируемые на множестве E функции, $|E| < +\infty$, и пусть для любого натурального числа n выполняется неравенство $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ для почти всех $x \in E$. Если существует постоянная M такая, что для любого натурального числа n выполняется неравенство $\left| \int_E f_n(x) dx \right| \leq M$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к некоторой функции $f(x)$, причем $f_n(x) \in L(E)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$.

Следствие (для функциональных рядов). Если все функции $u_n(x) \geq 0$ почти всюду на E , суммируемы на E и если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) dx$, то почти всюду на E сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, причем сумма $S(x)$ ряда суммируема на E и $\int_E S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) dx$, т.е. ряд можно интегрировать почленно. Здесь в качестве $f_n(x)$ берем частичную сумму $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$.

Теорема Лебега. Для того, чтобы ограниченная на E , $|E| < +\infty$ функция $f(x)$ являлась интегрируемой по Лебегу на E необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была измерима на E .

12. Теорема Фубини

Теорема (Фубини). Интеграл от интегрируемой на $D=[a;b] \times [c;d]$ функции двух переменных $f(x,y)$ может быть сведен к повторному:

$$\iint_D f(x,y) d\mu = \int_a^b d\mu_x \int_c^d d\mu_y f(x,y).$$

13. Классы L_p , $p > 1$. Неравенства Гельдера и Минковского

Определение. Функции $f(x)$, для которых функция $|f(x)|^p$ измерима и интегрируема на E , составляют линейное пространство $L_p(E)$. В пространстве L_p вводится норма:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_E |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p}.$$

Утверждение. Для функций $f \in L_p$, $g \in L_q$ ($1/p + 1/q = 1, p > 1, q > 1$) выполняется **неравенство Гельдера**:

$$\int_E |f(x)g(x)| d\mu \leq \left\{ \int_E |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int_E |g(x)|^q d\mu \right\}^{1/q}.$$

Утверждение. Для функций $f, g \in L_p$ ($p \geq 1$) выполняется **неравенство Минковского**:

$$\left\{ \int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_E |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int_E |g(x)|^p d\mu \right\}^{1/p}.$$

14. Полнота пространства L_p .

Теорема. Для измеримого множества E и $p \geq 1$ пространство $L_p(E)$ является полным.

15. Плотность множества непрерывных функций в L_p . Непрерывность в метрике L_p .

Теорема. Для любого измеримого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}$, множество $C(E)$ непрерывных функций, заданных на E , плотно в $L_p(E)$.

Теорема. Для любого измеримого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}$, любая функция $f \in L_p(E)$ непрерывна по норме пространства L_p , т.е.

$$\forall \varepsilon \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \|f(x+h) - f(x)\|_{L_p} < \varepsilon \text{ при } |h| < \delta.$$

16. Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.

Определение Множество M называется метрическим пространством, если каждой паре его элементов x и y поставлены в соответствии неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям: 1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Число $\rho(x, y)$ называется расстоянием между элементами x и y , а перечисленные три условия - аксиомами метрики. Любое множество можно сделать метрическим пространством: $\rho(x, y) = 0$, если $x = y$, $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$.

Теорема (о вложенных шарах). Пусть дана в полном метрическом пространстве M последовательность замкнутых шаров, вложенных друг в друга (то есть таких, что каждый последующий шар содержится внутри предыдущего), радиусы которых стремятся к нулю. Тогда существует и притом единственная точка, принадлежащая всем этим шарам.

17. Принцип сжатых отображений. Теорема Бэра о категориях.

Определение. Множество X называется множеством 1-ой категории, если она может быть представлено в виде суммы конечного или счетного числа нигде не плотных множеств. Множество, не являющееся множеством 1-ой категории, называется множеством второй категории.

Теорема (Бэра о категориях). Полное метрическое пространство есть множество 2-ой категории.

Теорема (принцип сжатых отображений). Пусть в полном метрическом пространстве M задан оператор A , переводящий элементы пространства M в элементы этого пространства. Пусть, кроме того, $\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$, где $\alpha < 1$, а x и y - любые элементы M . Тогда существует и притом единственная точка $x_0 \in M$ и такая, что $A(x_0) = x_0$. Эта точка называется неподвижной точкой оператора A , который, в свою очередь, называется сжатым (сжимающим) отображением.

18. Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса.

Определение Пусть X - линейное пространство над полем вещественных или комплексных чисел. X называется линейным нормированным пространством, если каждому его элементу x поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое нормой этого элемента, причем выполнены следующие аксиомы:

- 1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, λ - число из поля,
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ из линейного нормированного пространства отождествляется со сходимостью в метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$, причем полное линейное нормированное пространство называется банаховым.

Теорема Рисса. Пусть L - подпространство линейного пространства X , $L \neq X$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует элемент $y \in X \setminus L$, $\|y\| = 1$ и такой, что $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ для $x \in L$.

19. Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных операторов

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства над полем действительных или полем комплексных чисел.

Определение Отображение $A: X \rightarrow Y$ ($y = Ax$), то есть оператор A , определяемый на X с областью значений в Y , называется линейным оператором, если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ и любого числа λ справедливы равенства:

- а) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$,
- б) $A(\lambda x_1) = \lambda Ax_1$

Утверждение. Множество линейных операторов $L = \{A: X \rightarrow Y\}$ с нормой $\|A\|$, является нормированным линейным пространством.

Теорема. Если пространство Y - банахово, а X - произвольное линейное нормированное, то пространство операторов $L = \{A: X \rightarrow Y\}$ является банаховым.

Следствие. Сопряженное пространство $X^* = \{G: X \rightarrow \mathbf{R}\}$ всегда банахово, т.к. $\mathbf{R}$ банахово.

20. Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и следствия из неё. Пример из теории рядов Фурье на применение теоремы

Теорема (Банах-Штейнгауз, принцип равномерной ограниченности). Пусть X, Y - банаховы пространства, а $\{A_n\}$ - последовательность операторов из $L = \{A: X \rightarrow Y\}$. Если для любого $x \in X$ последовательность $\|A_n x\|$ ограничена, то последовательность $\|A_n\|$ также ограничена.

Пример: применения теоремы в теории рядов Фурье. Мы докажем существование непрерывной периодической функции, для которой ряд Фурье расходиться.

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt.$$

21. Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного опер.

Обратным к оператору $A: X \rightarrow Y$ называется оператор A^{-1} , такой, что $(Ax = y) \Leftrightarrow (A^{-1}y = x)$. Оператор, для которого (на всем Y) существует обратный, называется **обратимым**. Оператор, обратный к линейному, также является линейным.

Теорема. Пусть $A: X \rightarrow Y$ - линейный ограниченный оператор. Если существует постоянная $m > 0$, такая что $\|Ax\| \geq m\|x\|$ для $\forall x \in X$, то для A существует ограниченный обратный оператор A^{-1} .

Теорема (Нейман). Пусть на пространстве X задан линейный оператор $A: X \rightarrow X$, причем $\|A\| = q < 1$. Тогда $(I - A)$ имеет ограниченный обратный оператор $(I - A)^{-1}$.

Теорема Пусть оператор $A \in L(X \rightarrow X)$, где X – банахово пространство, имеет обратный оператор A^{-1} и существует линейный ограниченный оператор ΔA такой, что $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда оператор $B = A + \Delta A$, то есть возмущение оператора A , имеет обратный оператор B^{-1} , причем

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|\Delta A\| \|A^{-1}\|^2}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|}.$$

22. Теорема Банаха об обратном операторе

[1] стр. 259.

Теорема. Пусть линейный ограниченный оператор $A: E \leftrightarrow E_1$ задает взаимно однозначное соответствие пространств E и E_1 . Тогда существует ограниченный обратный оператор (A^{-1}) .

Определение. Множество X , представимое в виде суммы конечного или счетного числа нигде не плотных множеств, называется множеством **первой категории**. Все остальные множества называются множествами **второй категории**.

Лемма (Бэр). Всякое полное множество есть множество второй категории.

Лемма. Пусть на банаховом пространстве X определен линейный оператор $A: X \rightarrow Y$. Определим систему множеств $X_n = \{x \in X \mid \|Ax\| \leq n\|x\|\}$. Тогда пространство X есть объединение множеств X_n , причем среди этих множеств найдется хотя бы одно, всюду плотное в X .

23. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в линейном нормированном пространстве

Теорема (Хан-Банах). Пусть p - однородно-выпуклый функционал, определенный на линейном пространстве L над R , и пусть L_0 - линейное подпространство в L . Если f_0 - линейный функционал на L_0 , подчиненный p , т.е. на L_0 выполнено неравенство $\|f_0(x)\| \leq p(x)$, то f_0 может быть продолжен до линейного функционала, подчиненного f на всем L .

24. Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах

[1], стр. 215.

В гильбертовом пространстве H : $G(x) = (g, x)$, $g \in H$.

Теорема (Ф. Рисс). В пространстве $C[a; b]$ всякий непрерывный линейный функционал представляется в виде $F(f) = \int_a^b f(x) d\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - функция с ограниченным изменением.

В пространстве l_p : $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$, где $f = \{f_n\} \in l_q$ ($1/q + 1/p = 1$).

В пространстве $L_p[a; b]$: $F(f) = \int_a^b f(t) h(t) dt$, где $h(t) \in L_q$ ($1/q + 1/p = 1$).

25. Слабая сходимость. Связь между слабой и сильной сх-ю. Критерий сильной сх

Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного топологического пространства E называется **слабо сходящейся** к x_0 , если для любого непрерывного функционала $g(x):E \rightarrow \mathbb{R}$ последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к $g(x_0)$.

Утверждение. Если последовательность слабо сходится, то она ограничена.

Утверждение. Всякая сильно сходящаяся последовательность сходится и слабо.

Теорема. Последовательность $\{x_n\}$ из пространства X сходится сильно $\Leftrightarrow$ последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится равномерно на единичном шаре в X^* , т.е. на множестве функционалов f , таких что $\|f\| \leq 1$.

26. Определение гильбертова пространства и его основные свойства. Теорема об элементе с наименьшей нормой.

Евклидовым называется линейное векторное пространство со скалярным произведением. Скалярное произведение задает евклидову норму: $\|x\| = (x, x)^{1/2}$.

Два вектора называются **ортогональными** ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$.

Полное бесконечномерное евклидово пространство H называется **гильбертовым**.

Примеры: l_2 , L_2 .

Утверждение. Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой, и изоморфны пространству l_2 .

Неравенство Коши. $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Равенство параллелограмма. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Утверждение. Норма удовлетворяет равенству параллелограмма $\Leftrightarrow$ ее можно задать с помощью скалярного произведения.

Теорема. Замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве содержит один и только один элемент с минимальной нормой.

27. Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

Теорема (Леви). Пусть в гильбертовом пространстве H задано подпространство L . Каждый элемент $x \in H$ может быть единственным образом представлен в виде $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \perp L$, т.е. $z \in L^\perp$. При этом $\|x - y\| = \min \{\|x - u\|, u \in L\}$.

Таким образом, $H = L \oplus L^\perp$.

28. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве

Теорема. Всякий линейный функционал G в гильбертовом пространстве H записывается в виде скалярного произведения: $G(h) = (g, h)$, где g - фиксированный вектор из H , однозначно определяемый функционалом G , причем $\|g\| = \|G\|$.

29. Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Бессе. Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость её к нулю.

Подпространством, **порожденным** системой векторов $\{\varphi_n\}$, называется наименьшее (по включению) подпространство, содержащее $\{\varphi_n\}$. Система элементов $\{\varphi_n\}$ евклидова пространства E называется **полной**, если не существует ненулевого элемента x , ортогонального всем элементам $\{\varphi_n\}$, т.е. если $\{(\forall n: x \perp \varphi_n) \Rightarrow (x=0)\}$. Эта система называется **замкнутой**, если порожденное $\{\varphi_n\}$ замкнутое подпространство есть все E .

Система векторов $\{\varphi_n\}$ в евклидовом пространстве R называется **ортонормированной**, если $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$. Если система $\{\varphi_n\}$ при этом полна, то она называется **ортонормированным базисом** в R .

Утверждение. В сепарабельном евклидовом пространстве всякая ортонормированная система не более чем счетна.

Утверждение. Всякую ЛНЗ систему векторов можно перевести в ортонормированную с помощью процедуры Шмидта.

Утверждение. В гильбертовом пространстве полнота системы векторов эквивалентна ее замкнутости.

36. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля

Пусть $\{\varphi_k\}$ - ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве H , а f - произвольный вектор. Числа $c_k = (f, \varphi_k)$ называются **коэффициентами Фурье**, а ряд $\sum c_k \varphi_k$ называется **рядом Фурье** для f .

Утверждение. Коэффициенты Фурье удовлетворяют **неравенству Бесселя**: $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$.

Если система $\{\varphi_k\}$ при этом является полной, то это неравенство переходит в **равенство Парсеваля**, а ряд Фурье сходится к элементу f .

30. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств.

Теорема. В сепарабельном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

31. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства.

Теорема. Пусть $\{\varphi_n\}$ - произвольная ортонормированная система в полном евклидовом пространстве H и пусть числа $\{c_i\}$ таковы, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится. Тогда существует такой вектор $f \in H$, что $c_k = (f, \varphi_k)$, а $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

32. Сопряженный оператор, теорема о сопряженном операторе. Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного оператора и ядра сопряженного

Сопряженным для оператора $A: X \rightarrow Y$ называется оператор $A^*: Y^* \rightarrow X^*$, такой, что равенство $G(Ax) = [A^*G](x)$ выполняется для любого функционала $G \in Y^*$ и любого $x \in X$.

Примеры. Для оператора $A = \|a_{ij}\|$ в $\mathbf{R}^n$, сопряженный есть $A^* = \|a_{ji}\|$. В произвольном гильбертовом пространстве: $(g, Ax) = (A^*g, x)$.

Теорема. Оператор A^* , сопряженный к ограниченному линейному оператору A , также является ограниченным линейным, причем $\|A^*\| = \|A\|$.

33. Вполне непрерывный оператор. Пример интегрального вполне непрерывного оператора. Свойства вполне непрерывного оператора.

[1] стр. 272.

Линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ (X, Y - банаховы пространства) называется **вполне непрерывным** (или **компактным**), если всякое ограниченное множество он переводит в предкомпактное.

Примеры.

1) Оператор, переводящий банахово пространство в некоторое конечное подпространство компактен.

2) Оператор A , определенный на пространстве l_2 следующим образом: $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, \dots)$ - компактен.

3) В пространстве $C[a;b]$ важный класс компактных операторов образуют операторы, представимые в виде $Ax = y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt$ (функция $K(s,t)$ ограничена, а ее точки разрыва лежат на конечном числе непрерывных кривых).

4) Единичный оператор I в бесконечномерном банаховом пространстве не является компактным.

Теорема. Компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

Теорема. Оператор, сопряженный к компактному, компактен.

Теорема. Если оператор A компактен, а оператор B ограничен, то операторы AB и BA компактны.

34-36 – Теоремы Фредгольма.

Уравнение Фредгольма второго рода:

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) \text{ или } x = Ax + f.$$

(Оператор $A: L_2 \rightarrow L_2$ называется **оператором Фредгольма**.) При этом $f, x \in L_2[a;b]$, а функция K , называемая **ядром** уравнения, принадлежит классу L_2 на квадрате $a \leq t, s \leq b$.

Уравнение Фредгольма можно переписать в виде $Lx = f$, где $L = (I - A)$ - компактный оператор. Если $f \equiv 0$, уравнение называется **однородным**.

Лемма. $[\text{Im}(L)]^\perp = \text{Ker}(L)$, т.е. $\text{Im}(L)$ является замкнутым подпространством.

Лемма. Гильбертово пространство H представляется в виде прямой ортогональной суммы: $H = \text{Ker}(L) \oplus \text{Im}(L^*)$, $H = \text{Im}(L) \oplus \text{Ker}(L^*)$.

Обозначим $O = \{0\}$.

Лемма. $(\text{Ker}(L) = O) \Rightarrow (\text{Im}(L) = H)$; $(\text{Ker}(L^*) = O) \Rightarrow (\text{Im}(L^*) = H)$.

Лемма. $(\text{Im}(L) = H) \Rightarrow (\text{Ker}(L) = O)$; $(\text{Im}(L^*) = H) \Rightarrow (\text{Ker}(L^*) = O)$.

Теорема I. Неоднородное уравнение $Lx = f$ разрешимо $\Leftrightarrow$ правая часть f ортогональна любому решению неоднородного уравнения $Lx = 0$, т.е. $f \perp \text{Ker}(L)$.

Теорема II (альтернатива Фредгольма). Либо неоднородное уравнение имеет единственное решение при любой правой части, либо однородное уравнение имеет ненулевое решение.

Теорема III. Однородное уравнение $Lx = 0$ и сопряженное однородное уравнение $L^*y = 0$ имеют одинаковое и конечное число линейно независимых решений.

37. Понятие о спектре линейного оператора в бесконечномерных пространствах. Теорема Гильберта-Шмидта.

Пусть на банаховом пространстве X задан линейный оператор $A: X \rightarrow X$. **Резольвентным множеством** для A называется множество $\rho(A) \subseteq \mathbb{C}$ чисел λ (**регулярных значений**), для которых оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ (**резольвента** A) определен на всем A и ограничен. **Спектром** A называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Число λ называется **собственным значением** A , если $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq O$, а всякий ненулевой вектор x из $\text{Ker}(A - \lambda I)$ называется **собственным вектором**, отвечающим данному λ .

Теорема. Резольвентное множество оператора открыто, а спектр замкнут.

Теорема. Спектр оператора A ограничен: $\sup \{|\lambda| \in \sigma(A)\} = r \leq \|A\|$, где величина r , называемая **спектральным радиусом** оператора, определяется как $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Если $|\lambda| > r$, то резольвента как операторная функция разлагается в ряд Лорана: $R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$.

Тождество Гильберта. Пусть $\lambda, \mu \in \sigma(A)$. Тогда $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$.

Обозначим через $F(A)$ - множество операторных функций, аналитичных (т.е. разлагающихся в ряд Лорана) в окрестности $\sigma(A)$.

Теорема. Для любых двух аналитичных операторных функций $f, g \in F(A)$, любых двух чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

- 1) аналитичны их линейная комбинация и суперпозиция: $\alpha f + \beta g \in F(A), f \cdot g \in F(A)$;
- 2) если ряд $f(\lambda) = \sum \alpha_k \lambda^k$ сходится в некоторой окрестности $\sigma(A)$, то $f(A) = \sum \alpha_k A^k$.

Пусть $A: H \rightarrow H$ - вполне непрерывный (компактный) оператор на гильбертовом пространстве H .

Теорема. Число 0 входит в спектр A .

Теорема. Ненулевые элементы спектра A являются собственными значениями конечной кратности.

Теорема. При любом $\delta > 0$ оператор A имеет лишь конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающим собственным значениям, по модулю превосходящим δ .

Теорема. 0 - единственная возможная предельная точка спектра A .

Пусть оператор $A: H \rightarrow H$ в гильбертовом пространстве H является самосопряженным, т.е. $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых двух векторов x, y .

Теорема. (A - самосопряженный) $\Rightarrow (\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|)$.

Теорема. (A - самосопряженный) $\Leftrightarrow$ (величина (Ax, x) является действительным числом при любом x)

Теорема. Собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям A , ортогональны.

Пусть A - самосопряженный оператор. Обозначим $m(A) = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M(A) = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$.

Теорема. Спектр $\sigma(A)$ компактного самосопряженного оператора A лежит на отрезке $[m(A); M(A)]$.

Теорема. Самосопряженный компактный оператор имеет хотя бы одно собственное значение, равное его норме: $\lambda = \|A\|$.

Обозначим через e_k нормированный собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_k .

Теорема (Гильберт-Шмидт). Пусть A - компактный, самосопряженный оператор. Тогда для любого $x \in \text{Im}(A)$ справедливо представление в виде сильно сходящегося ряда Фурье $\sum_{\lambda_k \neq 0} (x, e_k) e_k = x$.